



# 1. Einführung

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $f$  ist ein Isomorphismus.
- $f$  ist ein Homomorphismus und  $f^{-1}$  existiert.
- $f$  ist ein Homomorphismus und  $f$  ist bijektiv.
- $f$  ist ein Homomorphismus und  $f$  ist surjektiv.
- $f$  ist ein Homomorphismus und  $f$  ist injektiv.

## 2. Isomorphismen

Seien  $(V, +, \cdot)$  und  $(W, +, \cdot)$  zwei Vektorräume über dem Körper  $K$ . Ein Isomorphismus  $f: V \rightarrow W$  ist ein bijektiver Homomorphismus. Die Abbildung  $f$  überträgt die Struktur von  $V$  auf  $W$ .

Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist. Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist.

(\*)  $f^{-1}(f(v)) = v$  für alle  $v \in V$  und  $f(f^{-1}(w)) = w$  für alle  $w \in W$ .

Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist. Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist.

Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist. Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist.

Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist. Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist.

Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist. Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist.

Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist. Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie ein bijektiver Homomorphismus ist.

(\*)  $f^{-1}(f(v)) = v$  für alle  $v \in V$  und  $f(f^{-1}(w)) = w$  für alle  $w \in W$ .

(\*)  $f^{-1}(f(v)) = v$  für alle  $v \in V$  und  $f(f^{-1}(w)) = w$  für alle  $w \in W$ .

1. The function  $f(x)$  is defined on the interval  $(-\infty, \infty)$  and satisfies the functional equation  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  for all  $x, y \in \mathbb{R}$ . Assume that  $f$  is continuous at  $x=0$ . Prove that  $f$  is linear, i.e.,  $f(x) = cx$  for some constant  $c \in \mathbb{R}$ .

2. Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a function satisfying  $f(x+y) = f(x)f(y)$  for all  $x, y \in \mathbb{R}$ . Assume that  $f$  is not identically zero. Prove that  $f(x) = e^{cx}$  for some constant  $c \in \mathbb{R}$ .

3. Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a function satisfying  $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$  for all  $x, y \in \mathbb{R}$ . Assume that  $f$  is continuous at  $x=0$ . Prove that  $f(x) = e^{cx} - 1$  for some constant  $c \in \mathbb{R}$ .

4. Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a function satisfying  $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$  for all  $x, y \in \mathbb{R}$ . Assume that  $f$  is not identically zero. Prove that  $f(x) = e^{cx} - 1$  for some constant  $c \in \mathbb{R}$ .

5. Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a function satisfying  $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$  for all  $x, y \in \mathbb{R}$ . Assume that  $f$  is not identically zero. Prove that  $f(x) = e^{cx} - 1$  for some constant  $c \in \mathbb{R}$ .





1. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .  
2. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .  
3. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .  
4. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .  
5. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .  
6. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .  
7. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .  
8. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .  
9. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .  
10. The function  $f(x) = \frac{1}{x}$  is defined for  $x \neq 0$ .

---

---

